Domácí úkol ze cvičení 11 – jako přípravu na cvičení 12 (7.1.16) promyslete:

1. Užitím definice limity funkce ukažte:

   a) $\lim\limits_{x\to 2+} \sqrt{x-2} = 0$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$; c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

2. Vypočítejte limity , nebo ukažte, že neexistují :

   a) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{(x+3)^2}$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2+1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{1-x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+4x-5}{(x-1)^2}$;

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{3-x^2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{3-x^2}$;

   c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

3. Vypočítejte následující jednoduché limity funkce (užití aritmetiky limit, věty o limitě složené funkce, věty o „dvou strážnících", základních limit a limit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$), nebo ukažte, že funkce limitu a daném bodě nemají :

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{\sin 2x}$; $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^{x+h}-e^x}{h}$; $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(2^{\frac{1}{x}}-1)$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos x - 1}$;

   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)}{\log(1-x^2)}$; $\lim\limits_{n\to\infty} n \log(1-\frac{2}{n}), n\in N$;

   $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$; $\lim\limits_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$; $\lim\limits_{x\to -1} \exp\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$;

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x(2+\sin x)$;

   $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+\cos x)$;

4. Vyšetřete, zda lze v bodě $a = 0$ spojitě dodefinovat (a lze-li, tak dodefinujte) funkci f, která je pro $x \neq 0$ dána předpisem $f(x) = \exp(-\frac{1}{x^2})$.

A třeba budete mít chuť se podívat i na tento příklad:

5. Z definice exponenciální funkce a funkce sinus jako součtu nekonečných řad

   $$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x\in R \quad \text{a} \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ x\in R$$

   ukažte, že $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.